

Условия равновесия системы выводятся из принципа возможных перемещений. Они применимы к системам, для которых этот принцип справедлив. Согласно принципу возможных перемещений, условие

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$$

является необходимым и достаточным для равновесия системы. Но в соответствии с (15')

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n.$$

396

Следовательно, необходимым и достаточным условием равновесия является равенство

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n = 0. \quad (21)$$

Так как обобщенные координаты независимы, то их вариации $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ являются тоже независимыми, произвольными, бесконечно малыми величинами. Можно принять $\delta q_1 \neq 0$, а все остальные $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_n = 0$. Тогда из (21) получим $Q_1 = 0$. Аналогично, приняв $\delta q_2 \neq 0$, а $\delta q_1 = \delta q_3 = \dots = \delta q_n = 0$, будем иметь $Q_2 = 0$ и т. д. Таким образом, из (21) получаем следующие условия равновесия системы:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_n = 0, \quad (22)$$

т. е. для равновесия механической системы, подчиненной голономным, стационарным, идеальным и неосвобождающим связям, в момент, когда скорости всех точек системы равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы были равны нулю.

О голономности связей условились при введении обобщенных координат и обобщенных сил, а также при определении числа степеней свободы. Другие условия для связей входят в формулировку самого принципа возможных перемещений.

В статике для равновесия свободного твердого тела, имеющего шесть степеней свободы, было получено шесть условий равновесия для приложенных к телу сил. Эти условия можно получить также приравняв нулю каждую из шести обобщенных сил. Для этого следует выбрать в качестве обобщенных координат декартовы координаты x, y, z какой-либо точки тела и углы поворота тела вокруг осей координат, проходящих через эту точку. Обобщенные силы, отнесенные к координатам x, y, z , превратятся соответственно в суммы проекций приложенных сил на эти оси, а обобщенные силы, отнесенные к углам поворота вокруг осей координат, — в суммы моментов сил относительно этих осей.

Условия равновесия (22) для системы, находящейся под действием потенциальных сил, вместе с (20) дадут следующие условия для силовой функции:

$$Q_1 = \partial U / \partial q_1 = 0, \quad Q_2 = \partial U / \partial q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_n = \partial U / \partial q_n = 0, \quad (22')$$

т. е. все частные производные от силовой функции по обобщенным координатам равны нулю. Это является необходимым условием существования экстремума силовой функции. Таким образом, при равновесии механической системы, находящейся под действием потенциальных сил, силовая функция и потенциальная энергия могут достигать экстремума.

Пример. Дифференциальный планетарный механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из двух шестерен радиусами r_1 и r_2 и кривошипа OA (рис. 99). К кривошипу приложена пара сил с моментом

397

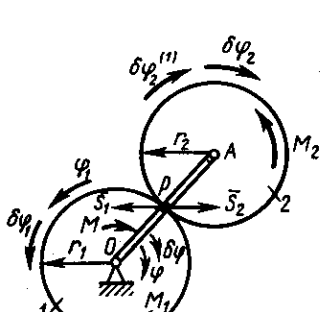


Рис. 99

M , а к шестерням 1 и 2 — пары сил с моментами M_1 и M_2 .

Определить моменты пар сил M и M_1 , которые следует приложить к шестерне 1 и кривошипу OA для равновесия механизма. Трением в шарнирах пренебречь.

Решение. Связи системы, осуществляемые твердыми телами и подвижным A и неподвижным O шарнирами без трения, являются идеальными, голономными, стационарными и неосвобождающими. Система имеет две степени свободы. Действительно, можно закрепить шестерню 1, тогда кривошип OA и шестерня 2 сохранят еще возможность вполне определенного движения. Если дополнительно закрепить еще и кривошип OA , то движение каких-либо звеньев механизма невозможно.

Выберем в качестве обобщенных координат углы поворота шестерни 1 (φ_1) и кривошипа OA (φ), отсчитываемые от каких-либо фиксированных положений этих тел. По условиям равновесия системы обобщенные силы, отнесенные к этим координатам, равны нулю, т. е. $Q_{\varphi_1} = 0$; $Q_{\varphi} = 0$.

Вычислим обобщенные силы по формулам

$$Q_{\varphi_1} = \frac{\left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k \right)_{\varphi_1}}{\delta \varphi_1}; \quad Q_{\varphi} = \frac{\left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k \right)_{\varphi}}{\delta \varphi}. \quad (a)$$

Индексы у скобок указывают, что суммы элементарных работ должны вычисляться при изменении той обобщенной координаты, которая указана в индексе. Другая обобщенная координата при этом не должна изменяться.

К числу активных сил следует отнести пары сил с моментами M, M_1, M_2 , силы тяжести шестерен и кривошипа и внутренние силы $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ действия шестерен друг на друга в точке P . Эти силы, как силы действия и противодействия, удовлетворяют условию $\bar{S}_1 = -\bar{S}_2$.

Так как механизм расположен в горизонтальной плоскости, то элементарные работы сил тяжести его звеньев равны нулю. Возможные перемещения точек приложения этих сил располагаются в горизонтальной плоскости, перпендикулярной силам тяжести.

Дадим шестерне 1 возможное перемещение $\delta \varphi_1$, например в сторону возрастания угла φ_1 , приняв при этом $\varphi = \text{const}$. Имеем

$$Q_{\varphi_1} = \frac{\left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k \right)_{\varphi_1}}{\delta \varphi_1} = \frac{M_1 \delta \varphi_1 - M_2 \delta \varphi_2^{(1)}}{\delta \varphi_1}. \quad (б)$$

Элементарная работа пары сил с моментом M_2 отрицательна, так как M_2 и $\delta \varphi_2^{(1)}$ направлены в противоположные стороны. Сумма элементарных работ сил $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ равна нулю, так как у них общая точка приложения и одно и то же возможное перемещение, а сами силы равны по модулю и противоположны по направлению.

При $\varphi = \text{const}$ углы поворота шестерен $\delta \varphi_1$ и $\delta \varphi_2^{(1)}$ направлены в противоположные стороны. Перемещения точки соприкосновения шестерен одинаковы. Следовательно,

$$r_1 \delta \varphi_1 = r_2 \delta \varphi_2^{(1)}; \quad \delta \varphi_2^{(1)} = \frac{r_1}{r_2} \delta \varphi_1.$$

Подставляя это значение $\delta \varphi_2^{(1)}$ в (б) и сокращая на $\delta \varphi_1$, получаем

$$Q_{\varphi_1} = M_1 - M_2 \frac{r_1}{r_2}. \quad (б')$$

398

Сообщим теперь кривошипу OA возможное перемещение $\delta \varphi$, например в направлении момента пары сил M , считая при этом угол φ_1 постоянным. Тогда

$$Q_{\varphi} = \frac{\left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k \right)_{\varphi}}{\delta \varphi} = \frac{M \delta \varphi - M_2 \delta \varphi_2}{\delta \varphi}. \quad (в)$$

В этом случае угол $\delta \varphi_2$ и момент M_2 опять противоположны. Точка соприкосновения шестерен P является теперь мгновенным центром скоростей для шестерни 2. Элементарная работа сил $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ в этом случае равна нулю для каждой силы.

Вычислим возможное перемещение точки A как точки кривошипа OA и шестерни 2, имеющей мгновенный центр скоростей в точке P . Имеем соответственно

$$\delta s_A = (r_1 + r_2) \delta \varphi = r_2 \delta \varphi_2.$$

Отсюда получаем

$$\delta \varphi_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \delta \varphi.$$

Подставляя эти значения в (в) и сокращая на $\delta \varphi$, получаем

$$Q_{\varphi} = M - M_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2}. \quad (в')$$

По условиям равновесия,

$$Q_{\varphi_1} = 0; \quad Q_{\varphi} = 0.$$

Учитывая (б') и (в'), получаем

$$M_1 - M_2 \frac{r_1}{r_2} = 0; \quad M - M_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2} = 0$$

или

$$M_1 = M_2 \frac{r_1}{r_2}; \quad M = M_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2}.$$